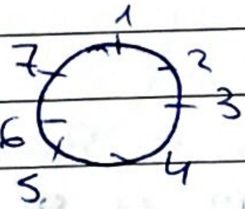
Date. No. 13/5/19

Φυλ 7

2) Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4,5,6,2)$

1) Βρείτε την ανάλυση του σ σε ξένους κύκλους ✓
2) -//- τις τροχιές της σ
3) $ord(\sigma) = 6$
4) $\sigma^{2018} = \sigma^{6\cdot\kappa+2} = \sigma^2 = (1,3,4,5,6,2)(1,3,4,5,6,2) =$
$= (1,4,6)\,(2,3,5)$
6) Βρείτε x τ.ω. $x\sigma x^{-1} = (1,2,3,4,5,6)$
7) Δείξτε ότι δεν $\exists\, x \in S_6 : x\sigma x^{-1} = (1,3,2)$

Λύση. 2) Μια τροχιά 

6) $x(1,3,4,5,6,2)x^{-1} = (1,3,2)$ — 4 τροχιές

$(x(1), x(3), x(4), x(5), x(6), x(2)) \neq (1,3,2)$

$(x(1), x(3), x(4), x(5), x(6), x(2)) =$

Date. No.

-P Βρείτε μια $x \in S_{12}$: $x(1,2,3,4)(2,5,7)(11,3,2,1,9,4)x^{-1} =$
$= x(1,9,10,11,4)(3,5,7) \Rightarrow x^{-1} = (5,6,11)(3,2,1,10,4)$

$= (x(1), x(9), x(10), x(11), x(4))(x(3), x(5), x(7)) =$
$= (3,2,1,10,4)(5,6,11)$

$x(1) = 3$
$x(9) = 2$
$x(10) = 1$
$x(11) = 10$
$x(4) = 4$
$x(3) = 5$
$x(5) = 6$
$x(7) = 11$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 6 & 12 & 11 & 9 & 2 & 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Πόσες τέτοιες μεταθέσεις $\exists$? $5 \cdot 3$ διαφορετικοί τρόποι και $4!$ $(7,8,9,12)$: τα στοιχεία που λείπουν.

$5 \cdot 3 \cdot 4! = 360$ διαφ. τρόποι

Δακτύλιοι

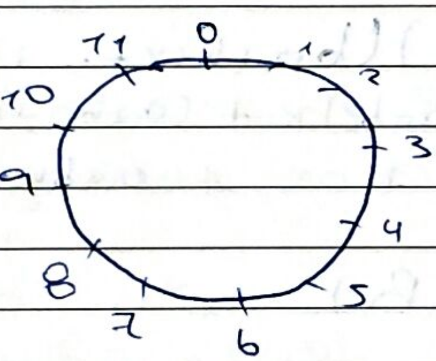
Ορισμός: Ένας δακτύλιος $(R,+,\cdot)$ είναι ένα σύνολο R μαζί με δύο διμελείς πράξεις + (πρόσθεση) και $\cdot$ (πολλαπλασιασμό) στο R έτσι ώστε να ισχύουν:

(1) $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα

(2) Για κάθε $a,b,\gamma\in R \Rightarrow a(b\gamma)=(ab)\gamma$ προσεταιριστική

(3) Για κάθε $a,b,\gamma\in R \Rightarrow a(b+\gamma)=ab+a\gamma$ και
$(a+b)\gamma=a\gamma+b\gamma$
επιμεριστική

G: group
R: ring



$\mathbb{Z}_{12}$ $\mathbb{Z}_n$

Παραδείγματα Δακτυλίων $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathbb{R}^{n\times n}$ ← $n\times n$ πραγμ. πίνακες

$(\mathbb{R}^{n\times n}, \underset{\text{πρόσθεση πινάκων}}{+}, \underset{\text{πολ/μος πινάκων}}{\cdot})$

$(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$
$A+0=0+A=A$
$A+(-A)=0$
$A+B=B+A$

Αβελιανή ομάδα

Δακτύλιοι: $\mathbb{Z}_7^{n\times n}, \mathbb{Z}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{Q}^{n\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$

Date. No.

Δακτύλιοι πολυωνύμων

$B[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \} / a_i \in B, n \in \mathbb{N}\}$

↑
δακτύλιος

$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m + 0 \cdot x^{m+1} + \dots + 0x^n) =$

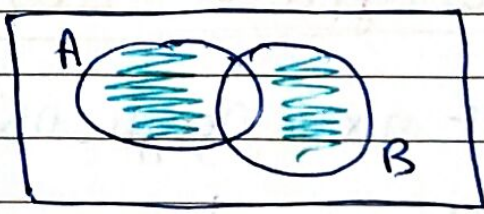
$= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$

$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) =$
$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots +$
$+ \left(\sum_{i=0}^{d} a_i b_{d-i}\right) x^d + \dots + a_nb_m x^{n+m}$

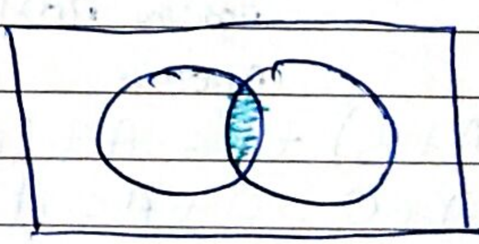
$B[x,y]$ $\qquad$ $B[x_1, x_2, \dots, x_n]$

→ Ω ένα σύνολο : Δακτύλιοι του Boole
Ω

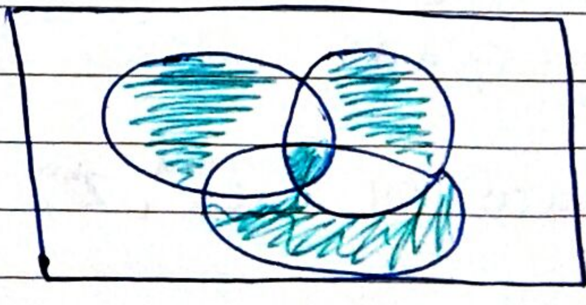
$(P(\Omega), \oplus, \odot)$
↑
Δυναμοσύνολο
του Ω



- $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \odot B = A \cap B$



- $(A \oplus B) \oplus \Gamma = A \oplus (B \oplus \Gamma)$



Date. No.

- $A \oplus A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$
- $A \odot \Omega = A \cap \Omega = A$

Ορισμός: Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου B ονομάζεται ταυτοδύναμο αν $\underset{a\cdot a}{\overset{\parallel}{a^2}} = a$

Παρατήρηση: Σε ένα δακτύλιο Boole κάθε στοιχείο είναι ταυτοδύναμο.

$A^2 = A \odot A = A \cap A = A$

Θεώρημα: Αν B είναι ενας δακτύλιος με ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης το 0 τότε για κάθε $a, b \in B$ ισχύει:

1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
2) $a \cdot (-b) = (-a) b = -(ab)$
3) $(-a) \cdot (-b) = ab$

Αποδ. 1) $0a = (0+0)a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

$0a + 0 = 0a + 0a \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{κανόνας}} 0 = 0 \cdot a$

όμοια $a \cdot 0 = 0$

2) Θα δείξουμε $a(-b) = -a \cdot b$

$ab + a(-b) = a(b-b) = a \cdot 0 = 0$

Άρα: $a(-b) = -ab$

Επίσ: $(-a)b = -ab$

3) $(-a)(-b) \overset{2}{=} -\underbrace{(-a)b} \overset{2}{=} -(-(ab)) = ab$

Date. No.

Ορισμός: Ένας δακτύλιος R λέγεται αντιμεταθετικός αν ισχύει $ab = ba$

$R^{n \times n}$ μη αντιμεταθετικός δακτύλιος

αντιμεταθετικοί $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n$

Ορισμός: Ένας δακτύλιος ~~R~~ ονομάζεται δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο αν υπάρχει $1 \in R$ τ.ω $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ για κάθε $x \in R$
Το 1 ονομάζεται μοναδιαίο στοιχείο του R

Το $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Δακτύλιος χωρίς μοναδιαίο στοιχείο

$(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ χωρίς μοναδιαίο στοιχείο
$(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $n > 1$ Δακτύλιος χωρίς μοναδιαίο στοιχείο

$R[x]$ Δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο
$1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$

$f(x) = -2019 + 17x^2 - \sqrt{2}x^3 + 11x^4$

$f(x)R[x] = \{ f(x)g(x) \mid g(x) \in R[x] \}$

$(f(x)R[x], +, \cdot)$ Δακτύλιος χωρίς μοναδιαίο στοιχείο

Παρατήρηση: Το μοναδιαίο στοιχείο σε ένα δακτύλιο R είναι μοναδικό

Έστω 1 και $1'$ μοναδιαία στοιχεία του R.

$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ για κάθε $x \in R$

$1' \cdot x = \boxed{x \cdot 1' = x}$ $\quad 1 = 1 \cdot 1' = 1' \Rightarrow 1 = 1'$

$\boxed{x = x'}$

Ορισμός. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένα στοιχείο υ του R λέγεται μονάδα του R αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο δηλ. υπάρχει $\upsilon' \in R$ τέτοιο ώστε $\upsilon \cdot \upsilon' = \upsilon' \cdot \upsilon = 1$

Παραδείγματα: $\mathbb{Z}$ μονάδες του $\mathbb{Z}$ $= \{1, -1\}$

$\mathbb{Q}$ μονάδες το $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

$\mathbb{R}$ -//- το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{C}$ -//- το $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$\mathbb{Z}_n$ -//- το $U(\mathbb{Z}_n)$ $= \{[a]_n \mid \text{μκδ}(a, n) = 1\}$

$\mathbb{R}^{n \times n}$ -//- είναι το $GL_n(\mathbb{R})$

Ορισμός. Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι μονάδα τότε ο R λέγεται δακτύλιος διαίρεσης. Σώμα λέγεται κάθε αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης. Στρεβλό σώμα λέγεται κάθε μη αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης

Date. No.

$\mathbb{Z}$: δεν είναι δακτύλιος διαιρέσεως

$\mathbb{Q}$: σώμα

$\mathbb{R}$: -//-

$\mathbb{C}$: -//-

$\mathbb{Z}_n \begin{cases} n: \text{πρώτος} & \text{Σώμα} \\ n: \text{σύνθετος} & \text{Δεν είναι σώμα} \end{cases}$

$\mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι σώμα $(n>1)$

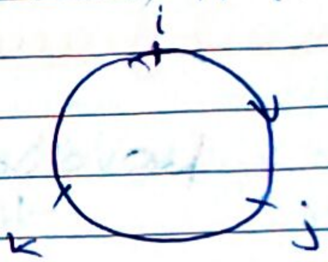
Στρεβλό σώμα : Οι τετράδες του Hamilton

$H_4 = \{a + bi + \gamma j + \delta k \mid a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$i\cdot j = k \quad j\cdot k = i \quad ki = j$

$ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j$



Ορισμός: Ένα μη μηδενικό στοιχείο $a \in R$ ονομάζεται διαιρέτης του μηδενός αν υπάρχει $b \neq 0$, $b \in R$ τέτοιο ώστε $a\cdot b = 0$ ή $b\cdot a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

διαιρέτες του μηδενός

a b

$\mathbb{Z}_6 \quad [2]_6 [3]_6 = [0]$